

# Tempo de Tunelamento na Frente de Luz

Aluno: Daykson Neves Possidonio  
Orientador: Jorge Henrique de Oliveira Sales  
Linha de pesquisa: Teoria de Campos e Ótica Quântica

Período: 2017-2019



Universidade Estadual do Santa Cruz - UESC  
Programa de Pós-Graduação em Física da UESC  
Ilhéus - BA, Brasil

Data de defesa: 18/02/2019

## Tempo de Permanência Estacionária

Calculamos o tempo de permanência estacionária com a equação

$$T = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx}{J(x)} \quad (1)$$

onde

$$\rho(x) = \Psi(x)\Psi^*(x) = |\Psi(x)|^2$$

e

$$J(x) = \frac{\hbar}{2im} \left[ \Psi^*(x) \frac{d}{dx} \Psi(x) - \Psi(x) \frac{d}{dx} \Psi^*(x) \right].$$

Tempo de permanência não relativístico em uma barreira de largura  $a$

$$V(x) = \begin{cases} V & \text{quando } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{outros lugares} \end{cases} .$$

Para o tunelamento, supõe-se que a energia cinética do pacote de ondas  $k$  seja menos que a barreira de potencial,  $k < V$ .

As soluções estacionárias para a equação de Schrödinger são escritas

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{para } x < 0 \\ \psi_{II}(x) = Ce^{-\rho x} + De^{\rho x} & \text{para } 0 < x < a \\ \psi_{III}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & \text{para } x > a \end{cases}$$

sendo

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} .$$

As condições de contorno na barreira implicam

$$B = \frac{(k^2 - \rho^2) \operatorname{sen}(\rho a)}{d(k, \rho; a)} A$$

$$C = \frac{k(k - i\rho)e^{\rho a}}{d(k, \rho; a)} A$$

$$D = -\frac{k(k - i\rho)e^{-\rho a}}{d(k, \rho; a)} A$$

$$F = \frac{2ik\rho e^{-ika}}{d(k, \rho; a)} A$$

onde  $d(k, \rho; a) = (k^2 - \rho^2)\operatorname{sen}(\rho a) + 2ik\cos(\rho a)$

## Tempo de permanência: Equação de Schrödinger

O tempo de permanência é dado por

$$T = \frac{\int_0^a |\psi_{II}(x)|^2 dx}{J(x)}$$

onde  $J(x)$  é a corrente incidente e  $\psi_{II}(x)$  é a função de onda dentro da abarreira:

$$J(x) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2,$$

$$\psi_{II}(x) = \frac{k(k + i\rho)e^{\rho(a-x)} - k(k - i\rho)e^{-\rho(a-x)}}{d(k, \rho; a)}$$

e

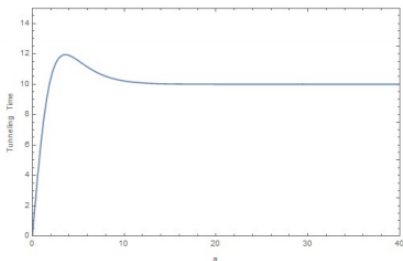
$$d(k, \rho; a) = (k^2 - \rho^2)\text{sen}(\rho a) + 2ik\rho\text{cos}(\rho a).$$

O tempo de permanência após a integração

$$T_{Sc} = \frac{m}{\hbar |d(k, \rho; a)|^2} \left\{ \frac{(k^2 + \rho^2)^2}{k\rho} \text{sen}(2\rho a) - 2ka(k^2 + \rho^2) \right\} \quad (2)$$

sendo que

$$|d(k, \rho; a)|^2 = (k^2 + \rho^2) \text{senh}^2(\rho a) + 4k^2 \rho^2.$$



$$\begin{aligned} m &= 1 \\ c &= \hbar = 1 \\ E_c &= 0.01 \\ V &= 0.05 \\ 0 &\leq a \leq 40 \end{aligned}$$

**Figura:** Tempo de tunelamento para casos totalmente não-relativísticos.

## Equação de Klein-Gordon Relativística

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + V(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

- ▶ **Problema:** a corrente de densidade de probabilidade para esse caso não é positivo definido.
- ▶ Dessa forma, o tempo de permanência estacionária não pode ser definido ou calculado como é.

# Transformações de Coordenadas na Frente de Luz (FL)

Dados

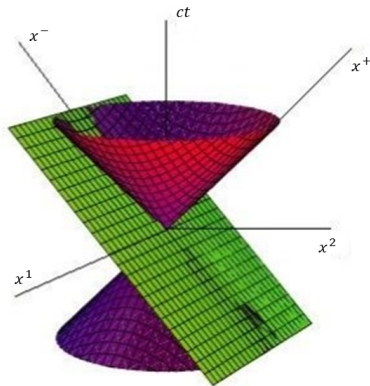


Figura: Coordenadas da frente de luz. Fonte: SALES, 2013.

As coordenadas de Frente de Luz são:

$$\begin{aligned}x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) \\x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \\ \vec{x}^\perp &= x^1 \vec{i} + x^2 \vec{j},\end{aligned} \quad (4)$$

onde:

$$\begin{cases}x^- \perp x^+, \\x^+ \Rightarrow \text{Tempo na Frente de Luz,} \\x^- \text{ e } x^\perp \Rightarrow \text{Espaço, } x^\perp = (x^1, x^2).\end{cases}$$



## Equação de Klein-Gordon na Frente de Luz (FL)

A equação de Klein-Gordon na FL com o potencial de interação  $V$  é escrito como

$$\left[ 2\partial^+\partial^- - \partial^{\perp 2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + V \right] \Psi_{FL}(x^+, x^\perp, x^-) = 0 \quad (5)$$

onde a solução de onda plana  $p = \hbar k$ ,  $\Psi_{FL}(x) = Ae^{i(k^+x^- + k^-x^+ - k^\perp x^\perp)}$

$$\left[ -2k^+k^- + k^{\perp 2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + V \right] \Psi_{FL} = 0$$

$$\left[ \frac{k^{\perp 2}}{2k^+} + \frac{m^2 c^2}{2k^+ \hbar^2} + \frac{V}{2k^+} \right] \Psi_{FL} = k^- \Psi_{FL}$$

Na FL, podemos reescrever  $k^+$  na forma de operador como

$$k^+ = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow k^+ = \frac{\hbar}{i} \partial^\perp$$

de forma que

$$\left[ -\frac{\hbar^2 \partial^{\perp 2}}{2k^+} + V_{FL} \right] \Psi_{FL} = k^- \Psi_{FL} \quad (6)$$

onde

$$V_{FL} \equiv \frac{m^2 c^2}{2k^+ \hbar^2} + \frac{V}{2k^+}$$

$\Psi_{FL}$  pode ser calculado diferenciando a equação anterior com relação a “energia”  $k^-$

$$\Psi_{FL} = -\frac{\hbar^2 \partial^3 \Psi_{FL}}{2k^+ \partial k^- \partial x^{\perp 2}} + [V_{FL} - k^-] \frac{\partial \Psi_{FL}}{\partial k^-}.$$

Quando temos  $\Psi_{FL}$ , podemos calcular

$$\Psi_{FL} \Psi_{FL}^* = \frac{\hbar^2}{2k^+} \left[ \frac{\partial^2 \Psi_{FL}^*}{\partial x^{\perp 2}} \frac{\partial \Psi_{FL}}{\partial k^-} - \Psi_{FL}^* \frac{\partial^3 \Psi_{FL}}{\partial x^{\perp 2} \partial k^-} \right]$$

então

$$\int_0^a \Psi_{FL} \Psi_{FL}^* dx^{\perp} = \frac{\hbar^2}{2k^+} \int_0^a \frac{\partial}{\partial x^{\perp}} \left[ \frac{\partial \Psi_{FL}^*}{\partial x^{\perp}} \frac{\partial \Psi_{FL}}{\partial k^-} - \Psi_{FL}^* \frac{\partial^2 \Psi_{FL}}{\partial x^{\perp} \partial k^-} \right]$$

A densidade de probabilidade e a corrente de probabilidade na FL sobre respectivamente

$$\rho_{FL} = \frac{\hbar}{im} (\Psi_{FL}^* \partial^- \Psi_{FL} - \Psi_{FL} \partial^- \Psi_{FL}^*)$$

$$J_{FL} = \frac{\hbar}{im} (\Psi_{FL}^* \partial^\perp \Psi_{FL} - \Psi_{FL} \partial^\perp \Psi_{FL}^*).$$

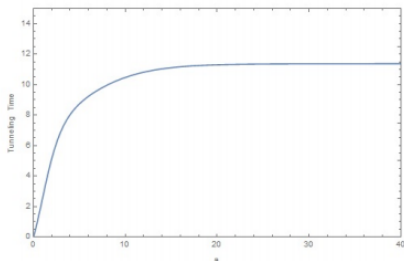
Estes satisfazem a equação de continuidade

$$\partial^+ \rho_{FL}^+ + \partial^\perp J_{FL} = 0.$$

O tempo permanência é calculado via

$$T_{FL} = \frac{\int_0^a \rho_{FL} dx}{J_{FL}}.$$

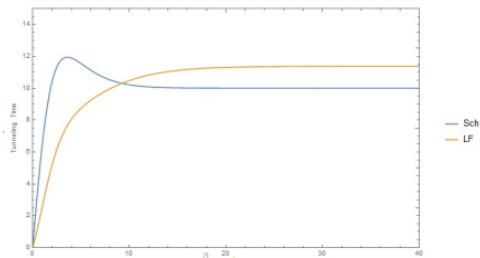
$$T_{FL} = \frac{\hbar m}{2k^+ k^\perp} \left[ 2|T|^2 \left( 2ak^+ k^\perp - \frac{d\phi_T}{dk^-} \right) + 4k^+ |R|^2 \text{sen}\phi_R \right] \quad (7)$$



$$\begin{aligned}
 m &= 1 \\
 c &= \hbar = 1 \\
 E_c &= 0.01 \\
 V &= 0.05 \\
 0 &\leq a \leq 40
 \end{aligned}$$

**Figura:** Tempo de tunelamento para casos totalmente não-relativísticos.

# Resultados e Discussões



$$\begin{aligned}m &= 1 \\c &= \hbar = 1 \\E_c &= 0.01 \\V &= 0.05 \\0 &\leq a \leq 40\end{aligned}$$

**Figura:** Tempo de tunelamento para casos totalmente não-relativísticos.

## Apresentações

- ♣ Daykson Neves Possidonio\*, Jorge Henrique Sales, Ilane Gomes Oliveira. Efeito Hartman na frente de luz. **XXXVIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos**. Passa Quatro - MG, Brasil, 2017.
- ♣ Jorge Henrique Sales\*, Daykson Neves Possidonio. Quantum Mechanics in the Light Front: Tunneling time. **Encontro de Outono da SBF**, 2018.
- ♣ A.T. Suzuki\*, J.H. Sales, D.N. Possidonio, P. H. Giroto. Zero-mode Manifestation in Quantum Tunneling Time in the Light Front. **LC 2019 – École Polytechnique**, Paris, France 16-20 September, 2019.
- ♣ A.T. Suzuki\*, J.H. Sales, D.N. Possidonio. Quantum Tunneling Time in the Light Front. **LC 2019 – École Polytechnique**, Paris, France 16-20 September, 2019.

## Artigos

- ♣ POSSIDONIO, D. N.; SALES, J. H. EFEITO MODO ZERO NO TEMPO DE TUNELAMENTO NA FRENTE LUZ. **Revista Semana da Física – EDITUS** - Editora da UESC, Volume 2, 2018 – ISSN: 2527-1830
- ♣ Jorge Henrique Sales, Alfredo Takashi Suzuki, Daykson N. Possidonio. Quantum tunneling time in the light-front. **Rev. Proceedings of Science**, Light Cone 2019 - QCD on the light cone: from hadrons to heavy ions - LC2019. Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2020.
- ♣ Jorge Henrique Sales, Alfredo T. Suzuki, Daykson N. Possidonio, Ilane Gomes Oliveira, Pedro Henrique Giroto. Transformações de Lorentz na frente de luz. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 42, e20190290, 2020.





# Agradecimentos



**Obrigado!**